Äquiforme Analogien zu einigen Geschwindigkeitseigenschaften der Kongruentbewegung der Ebene

Drábek, Karel

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 31, 1980, S.51-56

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Äquiforme Analogien zu einigen Geschwindigkeitseigenschaften der Kongruentbewegung der Ebene

Von **Karel Drábek**, Praha

Vorgelegt von Hans Robert Müller

(Eingegangen am 5. 5. 1979)

1. Einführung der Begriffe

Die Gangebene $(\sum)$ mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem $\sum$ und dem Ursprung Ω bewegt sich in der Rastebene $(\mathbf{S})$, in welcher ein gleichsinnig kongruentes Koordinatensystem $\mathbf{S}$ mit dem Ursprung $\mathbf{0}$ eingeführt wird. Eine äquiforme Bewegung ist dann durch die Gleichung

$$\mathbf{z} = \mathbf{m} + \zeta\,\mathbf{n},$$

wo man statt $\mathbf{n}$ auch $\mathbf{l}\Theta$ schreiben kann, gegeben. Dabei bedeutet $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\vartheta)$ eine komplexe Funktion, $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\vartheta) > 0$ eine reelle Funktion desselben Argumentes ϑ, $\Theta = \exp j\vartheta$ (j imaginäre Einheit), wenn man noch mit ϑ den orientierten Winkel der $\mathbf{x}$-Achse des Systems $\mathbf{S}$ mit der ξ-Achse des Systems $\sum$ bezeichnet. Eine so parametrisierte Bewegung nennen wir auch geometrische Bewegung, kurz **E**-Bewegung. Wir nennen weiter $\mathbf{m}(\vartheta)$ die Übertragung, $\mathbf{l}$ den Drehungsmodul (und $\mathbf{n} = \mathbf{l}\Theta$ die Drehung) der **E**-Bewegung.

Die Funktionen $\mathbf{m}(\vartheta)$ und $\mathbf{l}(\vartheta)$ sollen regulär bis zum notwendigen Rang auf dem zugehörigen Definitionsintervall $\mathrm{I}(\vartheta)$ sein.

Als **i**-te Geschwindigkeit der betrachteten **E**-Bewegung definieren wir den Vektorkomplex

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{z}^{(i)}$$

(die Ableitungen nach dem Parameter (ϑ), so daß dann

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{m}^{(i)} + \zeta\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{m}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)}\,(\mathbf{z} - \mathbf{m}) : \mathbf{n}$$

ist, bei $\mathbf{z}_i \in (\mathbf{S})$; dazu gehört als seine Koinzidenz ζ_i das Element der Ebene $(\sum)$, für welches

$$\mathbf{z}_i = \zeta_i\mathbf{n}$$

und also

$$\zeta_i = (\mathbf{m}^{(i)} + \zeta\mathbf{n}^{(i)}) : \mathbf{n}, \quad \mathbf{i} = 1, 2, \ldots$$

ist.

Wenn wir den **i**-ten Pol $({}^i\mathbf{z}) \in (\mathbf{S})$ der **E**-Bewegung ausdrücken, d.h.

$${}^i\mathbf{z} = \mathbf{m} + {}^i\zeta\,\mathbf{n}, \text{ wobei } {}^i\zeta = -\mathbf{m}^{(i)} : \mathbf{n}^{(i)} \text{ ist,}$$

schreiben, folgt für die **i**-te Geschwindigkeit

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{n}^{(i)} (\mathbf{z} - {}^i\mathbf{z}) : \mathbf{n} = {}^i\mathbf{p}\mathbf{n}^{(i)} : \mathbf{n},$$

wo wir mit ${}^i\mathbf{p}$ den sogenannten **i**-ten Vektorpolkomplex $\mathbf{z} - {}^i\mathbf{z}$ bezeichnen. Dann folgt

$$\zeta_i = {}^i\pi\, \mathbf{n}^{(i)} : \mathbf{n}, \text{ wobei } {}^i\pi = \zeta - {}^i\zeta \text{ ist.}$$

Für die weiteren Untersuchungen setzen wir noch

$$\mathbf{n}^{(i)} : \mathbf{n} = {}^i\mathbf{h} \exp j\,{}^i\chi,$$

wo ${}^i\mathbf{h}$, ${}^i\chi$ die Charakteristiken der **i**-ten Geschwindigkeit der **E**-Bewegung sind. Dann kann man $\mathbf{z}_i$, bzw. ζ_i in der Form

$$\mathbf{z}_i = {}^i\mathbf{p}\,({}^i\mathbf{h} \exp j\,{}^i\chi), \text{ bzw. } \zeta_i = {}^i\pi\,({}^i\mathbf{h} \exp j\,{}^i\chi)$$

schreiben.

2. $\varkappa$-Kreise

In demselben Punkt (ζ) und derselben Phase ϑ ist allgemein die erste Geschwindigkeit von der zweiten Geschwindigkeit verschieden. Wir können aber fragen, ob solche Punkte (ζ) in der Ebene (Σ) existieren, welche die Erzeugungspunkte der Bahnkurven der **E**-Bewegung sind und für welche die erste und zweite Geschwindigkeit kollinear sind (d.h. die betrachteten Geschwindigkeiten $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ haben dasselbe Argument, aber verschiedene Modulen), oder allgemeiner, ob solche Punkte (ζ) der Ebene (Σ) existieren, für welche die Differenz

$$\arg \mathbf{z}_2 - \arg \mathbf{z}_1 = \varkappa$$

gilt, wenn $\varkappa$ eine zuerst fest gegebene (reelle) Konstante ist. Dabei ist

$$\arg \mathbf{z}_i = (\ln \mathbf{z}_i : \bar{\mathbf{z}}_i) : 2j = (\ln {}^i\pi\, \mathbf{n}^{(i)} : {}^i\bar{\pi}\, \bar{\mathbf{n}}^{(i)}) : 2j, \quad \mathbf{i} = 1, 2.$$

Dann erfüllen die gesuchten Punkte die Gleichung

$${}^1\bar{\pi}\, {}^2\pi \exp 2j\,({}^2\chi - {}^1\chi) - {}^1\pi\, {}^2\bar{\pi} \exp 2j\,\varkappa = 0,$$

d.h. sie liegen auf dem sogenannten $\varkappa$-Kreise. Wenn in der Phase ${}^2\chi - {}^1\chi = 0$ ist, dann reduziert sich dieser Kreis auf eine Gerade

$${}^1\bar{\pi}\, {}^2\pi - {}^1\pi\, {}^2\bar{\pi} \exp 2j\,\varkappa = 0,$$

welche die beiden Pole $({}^1\zeta), ({}^2\zeta)$ verbindet.

Bei veränderlichem $\varkappa$ bilden die $\varkappa$-Kreise ein hyperbolisches Büschel mit den Grundpunkten in den beiden Polen $({}^1\zeta), ({}^2\zeta)$ (sogenanntes $\varkappa$-Büschel):

$${}^1\bar{\pi}\, {}^2\pi - {}^1\pi\, {}^2\bar{\pi} \exp 2j\,(\varkappa - ({}^2\chi - {}^1\chi)) = 0.$$

Für $\varkappa = 0$, bzw. $\varkappa = \pi : 2$ sind es die Kreise

$$[{}^1\pi, {}^2\pi \exp j\,({}^2\chi - {}^1\chi)] = 0,$$

bzw.

$$[{}^1\pi,\ j^2\pi \exp j\,({}^2\chi - {}^1\chi)] = 0.^{1)}$$

Wenn in der Phase ${}^2\chi - {}^1\chi = 0$, bzw. ${}^2\chi - {}^1\chi = \pi : 2$ ist, reduzieren sich diese Kreise auf die Geraden

$$[{}^1\pi,\ {}^2\pi] = 0, \text{ bzw. } [{}^1\pi,\ j^2\varkappa] = 0.$$

Das sind die E-Analogien des ersten, bzw. des zweiten Bresseschen Kreises (oder der Bresseschen Geraden) aus der kongruenten Bewegung der Ebene.

3. k-Kreise

Wir können weiter solche Punkte (ζ) der Ebene (Σ) suchen, für welche die erste und die zweite Geschwindigkeit denselben Modul mit verschiedenen Argumenten haben, oder allgemeiner solche Punkte (ζ) der Ebene (Σ), in welchen für gegebene $\mathbf{k} > 0$

$$\operatorname{mod} \mathbf{z}_2 = \mathbf{k} \operatorname{mod} \mathbf{z}_1$$

ist, wobei

$$\operatorname{mod} \mathbf{z}_i = \sqrt{\mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_i} = \sqrt{\mathbf{n}^{(i)}\, \bar{\mathbf{n}}^{(i)}\, {}^i\pi\, {}^i\bar{\pi}},\ \ \mathbf{i} = 1, 2, \text{ ist.}$$

Diese Forderung führt zur Gleichung

$$({}^2\mathbf{h} : {}^1\mathbf{h})^2\, {}^2\pi\, {}^2\bar{\pi} - \mathbf{k}^2\, {}^1\pi\, {}^1\bar{\pi} = 0;$$

die gesuchten Punkte (ζ) liegen wieder auf einem Kreis, der als **k**-Kreis bezeichnet wird. Dieser Kreis reduziert sich in den Phasen $2\mathbf{h} : {}^1\mathbf{h} = \mathbf{k}$ auf eine Gerade

$${}^2\pi\, {}^2\bar{\pi} - {}^1\pi\, {}^1\bar{\pi} = 0,$$

welche durch den Mittelpunkt der beiden Pole $({}^1\zeta), ({}^2\zeta)$ geht und auf ihrer Verbindungsgeraden senkrecht steht.

Bei veränderlichem **k** bilden die **k**-Kreise ein elliptisches Büschel

$${}^2\pi\, {}^2\bar{\pi} - {}^1\pi\, {}^1\bar{\pi}\, (\mathbf{k}\, {}^1\mathbf{h} : {}^2\mathbf{h})^2 = 0$$

mit den Grenzpunkten (Nullkreisen) in den Grundpunkten $({}^1\zeta), ({}^2\zeta)$ des $\varkappa$-Büschels. Es sind also die **k**-Büschel und $\varkappa$-Büschel zueinander adjungiert.

Für $\mathbf{k} = 1$ erhalten wir den Kreis

$${}^2\pi\, {}^2\bar{\pi} - {}^1\pi\, {}^1\bar{\pi}\, ({}^1\mathbf{h} : {}^2\mathbf{h})^2 = 0,$$

welcher sich in der Phase mit ${}^2\mathbf{h} - {}^1\mathbf{h} = 0$ auf die Gerade

$${}^2\pi\, {}^2\bar{\pi} - {}^1\pi\, {}^1\bar{\pi} = 0$$

reduziert.

---

1) Dabei bedeutet $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) : 2j$.

4. Kreis des konstanten Moduls

In dem **i**-ten Pol ($\mathbf{i} \geqq 1$) verschwindet die **i**-te Geschwindigkeit. Für den **k**-ten Pol ($\mathbf{k} \neq \mathbf{i}$ und $({}^{\mathbf{k}}\zeta) \not\equiv ({}^{\mathbf{i}}\zeta)$) ist

$$\zeta_{\mathbf{i}} = \mathbf{n}^{(\mathbf{i})}\,({}^{\mathbf{k}}\zeta - {}^{\mathbf{i}}\zeta) : \mathbf{n}.$$

In allen anderen Punkten existiert die **i**-te Geschwindigkeit mit dem Modul

$$\operatorname{mod} \zeta_{\mathbf{i}} = \sqrt{\zeta_{\mathbf{i}}\,\bar{\zeta}_{\mathbf{i}}}$$

und mit dem Argument

$$\arg \zeta_{\mathbf{i}} = (\ln \zeta_{\mathbf{i}} : \bar{\zeta}_{\mathbf{i}}) : 2\mathrm{j}.$$

Die Punkte (ζ) der Ebene (Σ), welche den konstanten (positiven) Modul **c** der **i**-ten Geschwindigkeit haben, liegen auf dem Kreise

$$\{\zeta, {}^{\mathbf{i}}\zeta\} = (\mathbf{c} : {}^{\mathbf{i}}\mathbf{h})^2, \text{[2]}$$

welcher seinen Mittelpunkt in dem **i**-ten Pol $({}^{\mathbf{i}}\zeta)$ hat und sein Halbmesser gleich $\mathbf{c} : {}^{\mathbf{i}}\mathbf{h}$ ist.

Wenn wir $\zeta + \zeta_{\mathbf{i}} = \hat{\zeta}$ setzen, dann bedeutet $\hat{\zeta}$ den Vektorkomplex des Endpunktes der **i**-ten Geschwindigkeit ζ_{i}, welcher seinen Anfangspunkt in dem Punkte (ζ) hat.

Dann liegen die Endpunkte $(\hat{\zeta})$ der Vektorkomplexe der **i**-ten Geschwindigkeit, welche in den Punkten (ζ) dieses Kreises konstruiert sind, auf dem Kreise

$$\{\hat{\zeta}, {}^{\mathrm{i}}\zeta + \zeta_{\mathrm{i}}\} = (\mathbf{c} : {}^{\mathbf{i}}\mathbf{h})^2$$

mit dem Mittelpunkt $({}^{\mathrm{i}}\zeta + \zeta_{\mathbf{i}})$ und demselben Halbmesser $\mathbf{c} : {}^{\mathbf{i}}\mathbf{h}$.

4.1. Gerade des konstanten Argumentes

Die Punkte (ζ) der Ebene (Σ) mit dem konstanten Argument γ der **i**-ten Geschwindigkeit liegen auf der Geraden

$$\zeta_{\mathbf{i}} : \bar{\zeta}_{\mathbf{i}} = \exp 2\mathrm{j}\gamma, \text{ oder } [\zeta - {}^{\mathbf{i}}\zeta, \exp \mathrm{j}\,(\gamma - {}^{\mathbf{i}}\chi)] = 0,$$

welche durch den **i**-ten Pol $({}^{\mathbf{i}}\zeta)$ geht und die Richtung $\gamma - {}^{\mathbf{i}}\chi$ hat.

Die Punkte $(\hat{\zeta})$ liegen dann auf der Geraden

$$[\hat{\zeta} - ({}^{\mathbf{i}}\zeta + \zeta_{\mathrm{i}}), \exp \mathrm{j}\,(\gamma - {}^{\mathbf{i}}\chi)] = 0,$$

welche durch den Punkt $({}^{\mathbf{i}}\zeta + \zeta_{\mathrm{i}})$ geht und dieselbe Richtung $\gamma - {}^{\mathrm{i}}\chi$ wie die oben angegebene Gerade hat.

---

[2] Dabei ist $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) . (\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}})$.

5. Kreis des konstanten Geschwindigkeitsmomentes

Die Gerade, welche durch den Vektorkomplex ζ_i so bestimmt ist, daß sie durch den Punkt (ζ) geht, hat die Gleichung

$$[\mathbf{Z} - \zeta, \mathbf{Z} - \hat{\zeta}] = 0,$$

oder

$$[\mathbf{Z}, \zeta_i\colon \operatorname{mod} \zeta_i] - [\zeta, \zeta_i\colon \operatorname{mod} \zeta_i[= 0.$$

Es ist aber $-[\zeta, \zeta_i\colon \operatorname{mod} \zeta_i]$ ihr euklidischer (und orientierter) Abstand von dem Ursprung Ω und das Moment der **i**-ten Geschwindigkeit (kurz das **i**-te Moment) in dem Punkt $(\zeta) \not\equiv ({}^{\mathbf{i}}\zeta)$ ist also das (reelle und von Null verschiedene) Produkt

$$-[\zeta, \zeta_i\colon \operatorname{mod} \zeta_i] \operatorname{mod} \zeta_i,$$

oder

$$-{}^{\mathbf{i}}\mathbf{h}\,[\zeta, (\zeta - {}^{\mathbf{i}}\zeta) \exp j^{\mathbf{i}}\chi].$$

Die Punkte (ζ) der Ebene (Σ), welche das **i**-te Moment konstant und gleich $\mathbf{C} \neq 0$ ($\mathbf{C}$ reell) haben, liegen auf der Linie

$$[\zeta, (\zeta - {}^{\mathbf{i}}\zeta) \exp j^{\mathbf{i}}\chi] + \mathbf{C}\colon {}^{\mathbf{i}}\mathbf{h} = 0.$$

In den Phasen mit $\exp j^{\mathbf{i}}\chi = 1$, d.h. für ${}^{\mathbf{i}}\chi = 0$, ist dies die Gerade

$$[\zeta, {}^{\mathbf{i}}\zeta] - \mathbf{C}\colon {}^{\mathbf{i}}\mathbf{h} = 0$$

(für $\mathbf{C}$ als Parameter erhalten wir das System von parallelen Geraden). In den Phasen mit $\exp j^{\mathbf{i}}\chi \neq 1$, d.h. für ${}^{\mathbf{i}}\chi \neq 0$, ist dies der Kreis

$$\zeta\bar{\zeta} + ({}^{\mathbf{i}}\bar{\zeta}\zeta \exp(-j^{\mathbf{i}}\chi) - {}^{\mathbf{i}}\zeta\bar{\zeta} \exp j^{\mathbf{i}}\chi)\colon 2j \sin {}^{\mathbf{i}}\chi - \mathbf{C}\colon {}^{\mathbf{i}}\mathbf{h} \sin {}^{\mathbf{i}}\chi = 0$$

(für $\mathbf{C}$ als Parameter bekommen wir das System von konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt $({}^{\mathbf{i}}\zeta (\exp j^{\mathbf{i}}\chi)\colon 2j \sin {}^{\mathbf{i}}\chi)$.

Literarische Bemerkungen

Eine systematische rein synthetische Theorie der Geschwindigkeiten des veränderlichen Systemes hat (seit dem Jahre 1874) L. Burmester ausgearbeitet. Grundlegende Bedeutung haben zwei seiner Arbeiten:

1) Zeitschrift f. Math. u. Physik 23 (1878), 108–131, Erster Teil und Zeitschrift f. Math. u. Phys. 47 (1903), 128–156, Zweiter Teil. In ihnen ist die Theorie der Geschwindigkeit und der Beschleunigung von beliebiger Ordnung des affin und ähnlich-veränderlichen Gebildes (speziell des starren Gebildes) in der Ebene und im Raume gegeben.

2) Civiling. XXIV (Neue Folge) (1878), 147–171. Da ist die Methodik der ersten Arbeit auf den Fall der Bewegung des ähnlich-veränderlichen (speziell starren) Gebildes angewandt.

An diese zweite Arbeit hat R. Mehmke (Civiling. XXIX (Neue Folge) (1883), 387–508) angeknüpft. R. Mehmke hat da die Burmesterschen Ergebnisse analytisch abgeleitet und ergänzt.

Allgemein zum Begriff der Geschwindigkeit in seinem klassischen kinematischen Sinne siehe E. Delassus (Nouv. Ann. Math. (4) 12 (= 71) (1912), 30–37) und zu der theoretischen Basis der formal eingeführten komplexen Darstellung I. Kolář (Czechoslovak Math. J., 21 (96) (1971), 118–123).

Den ebenen Fall der äquiformen Bewegung behandeln wohl am ausführlichsten M. Krause – A. Carl (Analysis der ebenen Bewegung, Berlin-Leipzig 1920, 132–216) mit Hinweisen auf die früheren Arbeiten, besonders aus dem Krausschen Dresdner mathematischen Seminar. Der Begriff der Geschwindigkeit, Beschleunigung, ... in ihrem mechanischen Sinn erfordert natürlich die Analyse der Bewegung, welche in der Zeit verläuft; mit dieser Auffassung ist etwa als erster in einer vorläufigen Mitteilung N. Abramesco (C. R. Acad. Sci., Paris 192 (1931), 918–920) und ausführlicher in Ann. Scuola norm. sup. Sci. fis. mat. (Pisa) (2) 1 (1932), 155–164, aufgetreten, immer aber nur für den ebenen Fall.

$\varkappa$-Kreise, genauso wie k-Kreise hat ebenfalls L. Burmester (Civiling. 1878, 156–157), die Verallgemeinerung der Bresseschen Kreise für höhere Geschwindigkeiten hat H. R. Müller (Archiv d. Math., IV (1953), 337–342) gefunden.

Die Ergebnisse der vorgelegten Arbeit bleiben für jedes $i \neq j$ gültig (in der Arbeit der Einfachkeit halber für $i = 1$, $j = 2$), so daß sie eine äquiforme Analogie dieser H.R. Müllerschen Verallgemeinerung darstellen.